

Extremalprinzip

Dr.-Ing. Mario Oertel
LuFG Wasserwirtschaft und Wasserbau
Bergische Universität Wuppertal

29. April 2008

Das Extremalprinzip nach BÖSS-BÉLANGER [1] ermöglicht die Anwendung der Theorie kritischer Abflusszustände. Hierbei werden ungleichförmige Fließzustände betrachtet. In Anlehnung an die Bernoulli-Gleichung erfolgt ein Vergleich zweier Fließquerschnitte, wobei einer durch den Sonderfall des Energieminimums ausgezeichnet ist. Ein typischer Anwendungsfall sind beispielsweise die Durchströmung von Brückenpfeilern oder von eingeeengten Querschnitten im Zuge von Baumaßnahmen.

1 Bernoulli-Gleichung

Über den Vergleich von Energiehöhen unter Berücksichtigung der Energieerhaltung erhält man die Bernoulli-Gleichung:

$$H_1 = H_2 + h_v$$

$$\frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{v_2^2}{2g} + h_2 + h_v \quad (1)$$

Diese setzt sich zusammen aus der jeweiligen Geschwindigkeitshöhe $v^2/2g$ sowie dem Wasserstand h an der betrachteten Stelle (vgl. Abb. 1). Aufgrund von Oberflächenbeschaffenheit oder geometrischen Variationen kommt es zu kontinuierlichen und örtlichen Verlusten, welche dem System Energie entziehen und über die Verlusthöhe h_v berücksichtigt werden müssen.

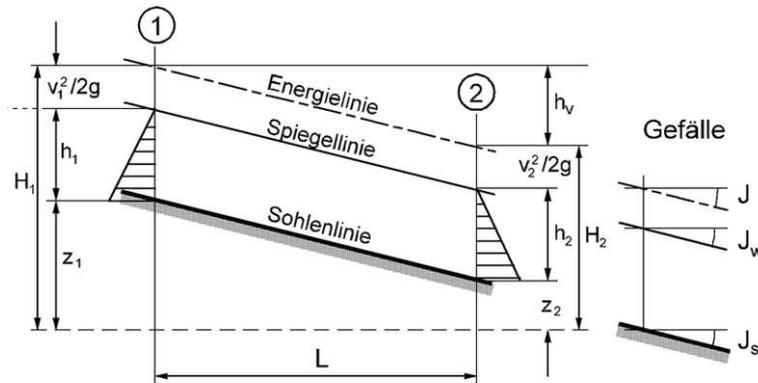


Abbildung 1: Energiehöhen bei stationär gleichförmiger Strömung, Quelle: PREIBLER & BOLLRICH [2]

2 Fließwechsel

2.1 Froudezahl

Bei fließenden Gewässer werden zwei Abflusszustände unterschieden:

1. Strömender Abfluss und
2. schießender Abfluss.

Eine Differenzierung erfolgt über die Betrachtung der Fließgeschwindigkeit v sowie der Ausbreitungsgeschwindigkeit v_a einer Flachwasserwelle. Dieses Verhältnis wird mit der so genannten Froudezahl beschrieben und kann wie folgt aufgeführt werden:

$$Fr = \frac{v}{v_a} = \frac{v}{\sqrt{gh}} \quad (2)$$

Ist in einem Rechteckgerinne die Froudezahl kleiner 1, so liegen strömende Verhältnisse vor. Bei Froudezahlen größer 1 erfolgt ein überkritischer Abfluss – das Wasser schießt. Ein wesentlicher Unterschied liegt zudem in den Übergangsstadien. So erfolgt der Übergang vom strömenden zum schießenden Abfluss kontinuierlich, wohingegen der Übergang vom Schießen zum Strömen nur über einen so genannten Wechselsprung vollzogen werden kann. Generell kann der Abflusszustand (schießen, strömen) bei allen Gerinnen über die Grenzwassertiefe bestimmt werden.

2.2 Energieminimum

Im Grenzbereich zwischen strömendem und schießendem Abfluss, also für $Fr = 1$, stellt sich das Energieminimum H_{min} ein. Dieses beschreibt die minimale Energie, welche vorhanden sein muss, damit ein Abfluss möglich ist. Zugleich werden Grenzwassertiefe h_{gr} und Grenzgeschwindigkeit v_{gr} erreicht. Die Zusammenhänge lassen sich über die Bernoulli-Gleichung herleiten. Hierfür wird beim Übergang nach Gl. (2) die Grenzgeschwindigkeit zu

$$v_{gr} = \sqrt{gh_{gr}} \quad (3)$$

angenommen und in Gl. (1) eingesetzt:

$$H_{min} = \frac{v^2}{2g} + h = \frac{v_{gr}^2}{2g} + h_{gr} = \frac{(\sqrt{gh_{gr}})^2}{2g} + h_{gr} = \frac{gh_{gr}}{2g} + h_{gr} = \frac{h_{gr}}{2} + h_{gr}$$

$$H_{min} = \frac{3}{2}h_{gr} \quad (4)$$

Die Grenzwassertiefe lässt sich über die Kontinuitätsgleichung bestimmen zu:

$$Q = vA = v_{gr}A = \sqrt{gh_{gr}}bh_{gr}$$

$$Q^2 = gh_{gr}b^2h_{gr}^2 = gb^2h_{gr}^3 \quad \Leftrightarrow \quad h_{gr}^3 = \frac{Q^2}{gb^2}$$

$$h_{gr} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}} \quad (5)$$

Für weitere Querschnittsformen, im Gegensatz zum hier vorgestellten Rechteckgerinne, lassen sich H_{min} , h_{gr} und v_{gr} analog bestimmen. Zugehörige Formeln sind der einschlägigen Literatur zu entnehmen. Abb. 2 zeigt den Zusammenhang zwischen Energieminimum, Grenzwassertiefe und Grenzgeschwindigkeit sowie den Übergangsbereich zwischen strömendem und schießendem Abfluss.

3 Extremalprinzip

Beim Extremalprinzip erfolgt, wie auch oben erwähnt, ein Vergleich zwischen zwei Fließquerschnitten, wobei einer durch den Sonderfall des Energieminimums ausgezeichnet ist (PRESS & SCHRÖDER [3]). „Von Bedeutung ist dabei, dass die Abflussverhältnisse unterhalb der Stelle des Fließwechsels, wo sich h_{gr} und H_{min} einstellen, keinen Einfluss auf den Strömungsverlauf oberhalb dieser Stelle haben.“

Wenn $H_u > H_{min,eng}$ Die Energiehöhe im Unterwasser ist „zu groß“, so dass sich ein rückwirkender Einfluss ins Oberwasser auswirkt. Es erfolgt kein Fließwechsel. Die Energiehöhe im Oberwasser bestimmt sich demnach zu $H_o = H_u + h_v$.

Es gilt zu beachten, dass es bei dem Vergleich der Energiehöhen nicht darum geht, ob die Energiehöhe im Unterwasser für einen dortigen Abfluss ausreicht. Dafür müsste $H_{min,u}$ bestimmt und mit H_u verglichen werden. Der Vergleich zwischen H_u und $H_{min,eng}$ bezieht sich auf einen möglichen rückwirkenden Einfluss von Unterwasserseite aus. Dies würde bedeuten, dass sich kein Grenzzustand in der Engstelle einstellen würde, so dass die Energiehöhe im Unterwasser maßgeblich für die Energiehöhe im Oberwasser ist. Das Extremalprinzip, welches den Übergang zum schießenden Abfluss in der Engstelle voraussetzt, ist für diesen Fall also nicht anwendbar. Diese Bedingung gilt es zu überprüfen.

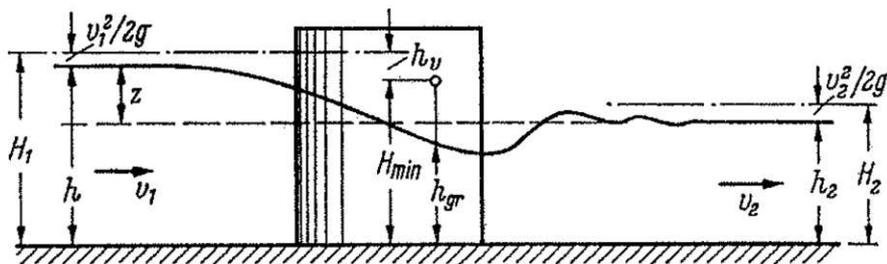


Abbildung 3: Energiehöhe in Engstelle, Quelle: PRESS & SCHRÖDER [3]

Literatur

- [1] BÖSS, P. (1950) *Neue Berechnungsmethoden im praktischen Wasserbau*, Die Wasserwirtschaft, Sonderheft.
- [2] PREIßLER & BOLLRICH (1980) *Technische Hydromechanik*, Band 1, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin.
- [3] PRESS, H. & SCHRÖDER, R. (1966) *Hydromechanik im Wasserbau*, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, München.