Herleitungen aus der Bernoulli-Gleichung

Dr.-Ing. Mario Oertel
Oberingenieur
LuFG Wasserwirtschaft und Wasserbau
Bergische Universität Wuppertal

1. Dezember 2008

1 Bernoulli-Gleichung

Die Bernoulli-Gleichung in allgemeiner Form lautet:

$$H = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \tag{1}$$

mit:

H	gesamte energiehöhe in [m],
$v^2/2g$	Geschwindigkeitshöhe in [m],
$p/\rho g$	Druckhöhe in [m],
z	geopdätische Höhe in [m].

In der Rohrhydraulik als auch in der Gerinneströmung treten über den Fließweg jedoch Verluste auf, so dass die Bernoulli-Gleichung um einen Verlustterm h_v erweitert werden muss. Die erweiterte Bernoulli-Gleichung schreibt sich somit:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_v \tag{2}$$

Die Verlusthöhe h_v beinhaltet in der Rohrhydraulik kontinuierliche und örtliche Verluste. In der Gerinnehydraulik werden Verluste an der benetzten Uferböschung einbezogen. Die Verlusthöhe lässt sich bestimmen zu:

$$h_v = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \tag{3}$$

mit:

λ	Verlustbeiwert,
$v^2/2g$	Geschwindigkeitshöhe,
L	Länge, auf der Verluste auftreten,
D	Rohrdurchmesser, in der Gerinneströmung kann für breite Gerinne $D = 4R = 4A/U$ angesetzt werden.

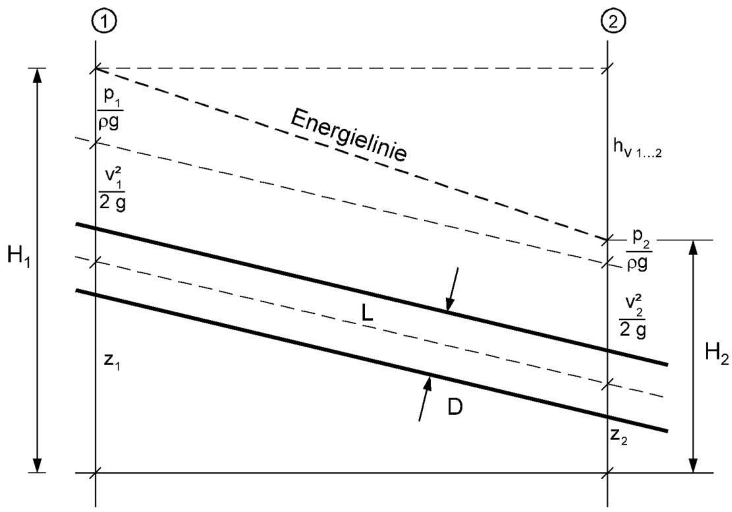

Abbildung 1: Energiehöhen in der Rohrhydraulik

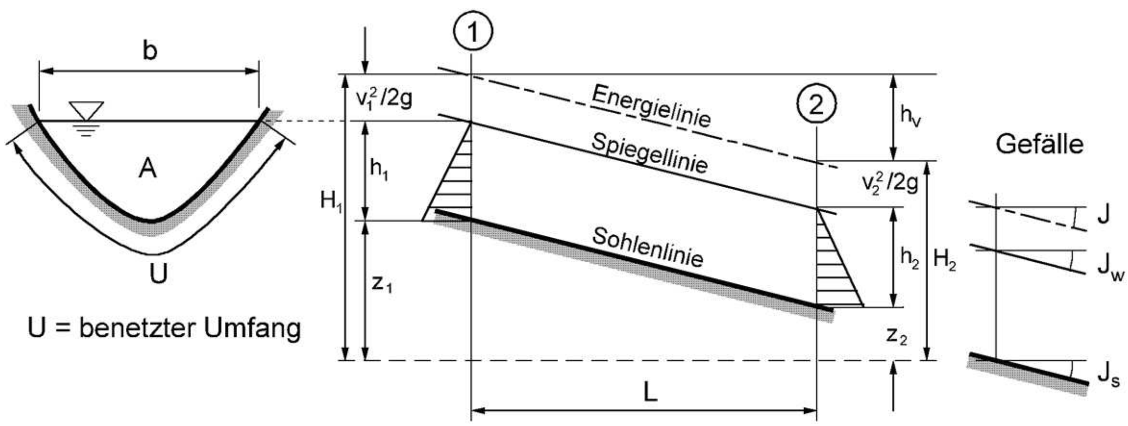

Abbildung 2: Energiehöhen in der Gerinnehydraulik

2 Toricelli-Gleichung

Aus der Bernoulli-Gleichung (Gl. 1) lässt sich unter Annahme folgender Randbedingungen die Toricelli-Gleichung herleiten:

- $v_1 = 0$,
- $p_0 = p_1 = 0 =$ relativer Luftdruckt,
- keine Verluste.

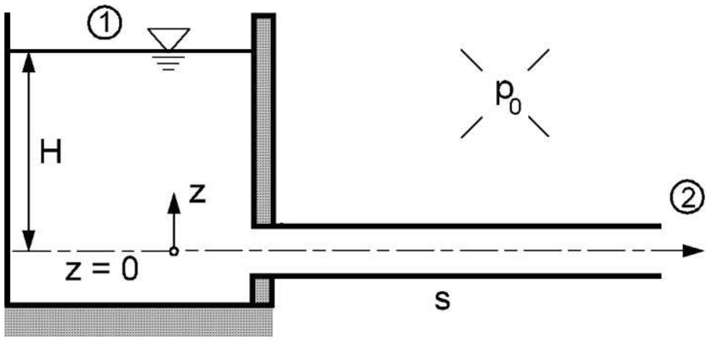

Abbildung 3: Verlustfreier Auslauf aus einem Gefäß

Somit ergibt sich:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \qquad |\, p_1 = p_2 = 0 \,|\, z_1 = H, z_2 = 0 \,|\, v_1 = 0$$

$$H = \frac{v_2^2}{2g} \qquad |\cdot 2g$$

$$v_2^2 = 2gH \qquad |\sqrt{...}$$

$$v_2 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2g\Delta h} \tag{4}$$

3 Toricelli-Gleichung mit Innendruck

Für den Fall, dass im oberen Bereich des Gefäßes kein Luftdruck vorliegt, sondern ein geschlossenes System mit abweichendem Innendruck, muss dieser Innendruck in der Aufstellung der Bernoulli-Gleichung berücksichtigt werden. Als Annahmen gelten:

- $v_1 = 0$,
- $p_0 \neq p_1$,
- keine Verluste.

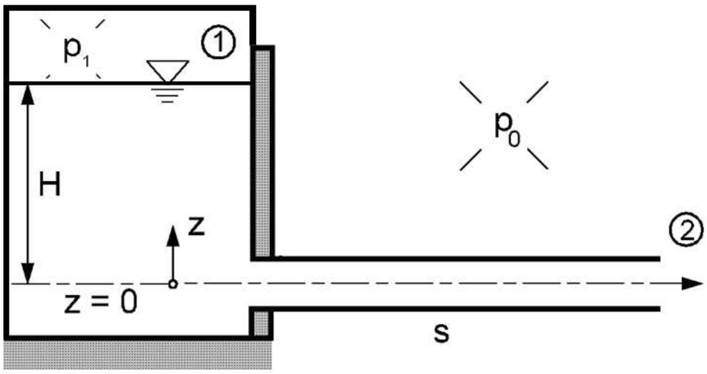

Abbildung 4: Verlustfreier Auslauf aus einem Gefäß mit Innendruck

Somit ergibt sich:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \qquad |\, p_1 \neq p_2 \,|\, z_1 = H, z_2 = 0 \,|\, v_1 = 0$$

$$\frac{p_1}{\rho g} + H = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} \qquad |- \frac{p_2}{\rho g} \,| \cdot 2g$$

$$v_2^2 = \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + H\right) \cdot 2g \qquad |\sqrt{\dots}$$

$$v_2 = \sqrt{2g\left(\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + H\right)} = \sqrt{2g\left(\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \Delta h\right)} \tag{5}$$

4 Toricelli-Gleichung mit Innendruck und Verlusten

Werden zusätzlich Verluste angesetzt, so berechnet sich die Austrittsgeschwindigkeit wie folgt:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_v \qquad |\, p_1 \neq p_2 \,|\, z_1 = H, z_2 = 0 \,|\, v_1 = 0$$

$$\frac{p_1}{\rho g} + H = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_v \qquad |\, h_v = \zeta \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\frac{p_1}{\rho g} + H = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + \zeta \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\frac{p_1}{\rho g} + H = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}(1+\zeta)$$

$$\frac{p_1}{\rho g} + H = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_v \qquad |\, - \frac{p_2}{\rho g} \,|\, \cdot 2g \,|\, : (1+\zeta)$$

$$v_2^2 = \frac{\left(\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + H\right) 2g}{1+\zeta} \qquad |\, \sqrt{\dots}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2g\left(\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + H\right)}{1+\zeta}} = \sqrt{\frac{2g\left(\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \Delta h\right)}{1+\zeta}} \tag{6}$$

5 Austrittsgeschwindigkeit mit Verlusten bei variierenden Durchmessern

Wenn sich der Durchmesser über den Fließweg ändert und eine Berechnung mit Verlusten durchgeführt werden soll, so können diese in Bezug auf die Austrittsgeschwindigkeit sowie dem zugehörigen Durchfluss Q abgeschätzt werden.

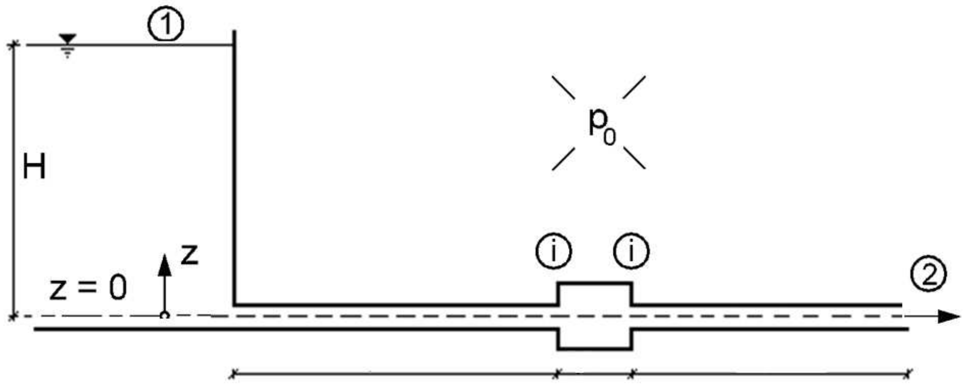

Abbildung 5: Austrittsgeschwindigkeit mit Verlusten bei variierenden Durchmessern

Es gilt:

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} \qquad \Rightarrow \qquad Q = v_2 \cdot A_2 \qquad Q = v_2 \cdot \frac{\pi d_2^2}{4} \tag{7}$$

Die Geschwindigkeit an einer Stelle i berechnet sich somit zu:

$$v_i = \frac{Q}{A_i} = \frac{v_2 \frac{\pi d_2^2}{4}}{\frac{\pi d_i^2}{4}} = v_2 \cdot \frac{d_2^2}{d_i^2}$$

Das Aufstellen der Bernoulli-Gleichung ergibt:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_v \qquad | \, p_1 = p_2 = 0 \, | \, z_1 = H, z_2 = 0 \, | \, v_1 = 0$$

$$\Delta h = \frac{v_2^2}{2g} + h_v = \frac{v_2^2}{2g} + \sum_i \zeta_i \frac{v_i^2}{2g}$$

Da die Verluste in Abhängigkeit der jeweiligen Geschwindigkeit v_i berechnet werden müssen, folgt nach dem Einsetzen:

$$\Delta h = \frac{v_2^2}{2g} + \sum_i \zeta_i \frac{\left(v_2 \frac{\pi d_2^2}{d_i^2}\right)^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} + \sum_i \zeta_i \frac{v_2^2 \frac{d_2^4}{d_i^4}}{2g}$$

Ausklammern des Terms $v_2^2/2g$ führt zu:

$$\Delta h = \frac{v_2^2}{2g}\left(1 + \sum_i \zeta_i \frac{d_2^4}{d_i^4}\right)$$

Nun kann erneut nach der Geschwindigkeit v_2 aufgelöst werden:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{1 + \sum_i \zeta_i \frac{d_2^4}{d_i^4}}} \tag{8}$$