Wasserbauliches Versuchswesen

Dr.-Ing. T. Schlurmann, Obering.
Bergische Universität Wuppertal

7. November 2002

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Die Darstellung von hydraulischen Vorgängen mit Mitteln der technischen Mechanik ist solange möglich, wie die den Vorgang beschreibenden Differentialgleichungen analytisch und numerisch ausgewertet werden können. Auch wenn die Entwicklung mathematischer Formulierungen und Methoden sowie numerischer Simulationen mittels leistungsstarker Computer große Fortschritte gemacht hat, bleiben – auch langfristig gesehen – hydraulische Modelle in der Hydromechanik und im Wasserbau erhalten. Sir Cyril Hinkelwood brachte diesen Gegensatz beider Techniken mit einem Satz ausgezeichnet zum Ausdruck (Le Mehauté, [5]): *(...) hydraulic engineers observed what could not be explained, and mathematicians explained things that could not be observed.*

Das Fehlen einer brauchbaren Turbulenztheorie, wovon im folgenden noch häufiger berichtet wird, führt zu Abschätzungen und zu vereinfachten Beschreibungen phänomenologischer Vorgänge sowie zur Definition von Parametern. Zur Ergänzung dieser vereinfachenden Betrachtungsweise werden diese Parameter mit geometrisch bestimmbaren numerischen Werten definiert, die aus der Erfahrung bekannt sind oder gezielt ermittelt werden. Für die Bestimmung dieser Größen eignen sich hydraulische Modelle, an denen jedoch auch das physikalische Verhalten einer Strömung – also das Phänomen selbst – studiert werden kann.

Das Modell kann also eine ähnliche Nachbildung eines Prototyps sein, in dem alle korrespondierenden Größen in einem bestimmten Bezug stehen, oder es ist ein unähnliches Modell, in dem nur das qualitative Verhalten (Phänomen) des Vorgangs studiert wird. Beide Modellformen werden im wasserbaulichen Versuchswesen angewendet.

Die Nachbildung des Modells erfolgt im allgemeinen in einem Labor, wobei in der Merzahl aller Fälle das Modell kleiner als der Prototyp in der Natur ist. Um nun die an dem Modell gewonnenen Erkenntnisse auf den Prototyp übertragen zu können, müssen definierte physikalische Gesetzmäßigkeiten eingehalten werden. Man kann aber auch die geometrische oder hydraulische Ähnlichkeit verlassen und Analogien zwischen der Strömungsmechanik und anderen Gebieten der Physik anwenden. Die experimentelle Strömungsforschung und das wasserbauliche Versuchswesen für konkrete Probleme des Bauingenieurwesens sollen im folgenden beschrieben werden.

1.1 Vorteile physikalischer Modelle

Die Vorteile maßstäblicher physikalischer Modelle liegen vor allem darin, dass hydromechanische Phänomene, die sich prinzipiell den gängigen Erkenntnissen einer modernen Wissenschaft entziehen, fundiert und *am Modell im direkten Kontakt mit dem Medium* untersucht werden können. Aus einer anderen Sichtweise fasst Dalrymple [2] die entscheidenden Vorteile zusammen:

- Physikalische Modelle integrieren die den Prozess beherrschenden Gleichungen ohne dass vereinfachende Randbedingungen impliziert werden müssen, wie es analytische und numerische Modelle verlangen,

- durch die maßstäbliche Abbildung im Modell werden Daten einfacher und kostenreduziert erfasst, wobei Feldversuche am Prototyp schwieriger und teurer sind und simultane Messungen ohne Beeinträchtigung der Prozesse kaum möglich sind,
- und der Grad der experimentellen Kontrolle, welcher variationsreiche und auch seltene extrem Randbedingungen erlaubt, ist beim physikalischen Modelle weitaus grösser als beim Prototyp.

Le Mehauté, [5] gibt des weiteren sechs essentielle Gründe zum Einsatz physikalischer Modelle an:

- Maßstäbliche physikalische Modelle sind im Vergleich zu analytischen und numerischen Simulation weitaus aufwändiger und kostenintensiver, bieten aber ein Höchstmaß an Zuverlässigkeit und Transparenz, um in konträren *decision-making-processes* glaubwürdige Abbildung der physikalischen Verhältnisse zu liefern und Entscheidungen somit zu vereinfachen,
- Experimentelle Techniken werden langfristig ein wertvolles Werkzeug in der Hydromechanik und im Wasserbau bleiben. Das Fehlen einer sinnvolllen Turbulenztheorie führt dazu, dass grobe Abschätzungen zur Beschreibung von phänomenologischen Vorgängen sowie zur Definition von Parametern für analytische und numerische Berechnungen nach wie vor gemacht werden müssen. Fluidströmungen sind vornehmlich chaotischer Natur. Dieses Chaos kann dennoch als deterministisch definiert werden, aber es ist prinzipiell nicht vorhersagbar, da ein kleiner Auslöser eine große Wirkung haben kann. Eine mathematische Berechnung eines stochastischen Prozesses kann nur zu gemittelten statistischen Ergebnissen einer experimentellen Größe führen.
- Neue Messtechniken wurden in der Hydromechanik entwickelt, die ein detaillierteres Bild der internen Strömungsprozesse liefern. Datenaufnahme- und -analysemethoden sind komplexer geworden und erlauben die Erfassung mehrerer voneinander abhängiger Variablen.
- Die Genauigkeit numerischer Modellierungen ist von der mathematischen Genauigkeit der dieser zu Grunde liegenden Gleichungen abhängig. Physikalsiche Modelle bieten die Möglichkeiten der Beobachtung und Messung der internen Prozesse,
- Maßstäbliche physikalische Modelle bleiben die besten *analogen* Computer, die die Einbindung komplexer Randbedingungen ermöglichen. Konvektive und dissipative nichtlineare Effekte, die in numerischen Simulationen (oftmals) vernachlässigt werden, werden in maßstäblichen physikalischen Modelle berücksichtigt und unterliegen sogar dem Ähnlichkeitsprinzip,

- und, der direkte Kontakt mit dem Medium bildet wertvollen Anhalt um intuitiv Erkenntnisse über die Prozesse zu erhalten. Es stimuliert die Vorstellungskraft der Ingenieurs und bildet die Grundlage für Entscheidungsfindungen, die in der Theorie oder von Computern nicht vermittelt werden können.

1.2 Nachteile physikalischer Modelle

Die zuvor genannten Vorteile zum Einsatz physikalischer Modelle müssen nach Hughes [3] im direkten Vergleich mit gewissen Unzulänglichkeiten dieser Methoden behandelt werden. Im einzelnen werden herausgestellt:

- Skalierungseffekte, die zwischen Modell und Prototyp unweigerlich auftreten, und nicht gleichsam Berücksichtigung im Modell finden können. Dieses Phänomen stellt für ein physikalisches Modell dieselben Unzulänglichkeiten dar, wie eine idealisierte Randbedingung für eine numerische oder analytische Simulation. Beispiel: Ein Skalierungseffekt, der vorwiegend auftritt ist, dass Reibungskräfte an Flusssohlen oder Bauwerksoberfächen, die z.B. für den Sedimenttransport oder Dissipationseigenschaften einer Struktur untersucht werden, im Modell relativ größer als in der Natur oder am Prototypen sind.

- Laboreffekte, die den zu simulierenden Prozess im Modell deutlich beeinflussen und zu inkorrekten Analysen führen können. Beispiel: Ein Laboreffekt, der hauptsächlich auftritt ist, dass z.B. Laborabmessungen (Randbedingungen) nicht ausreichen, um physikalische Prozesse umfassend abzubilden und infolgedessen durch Überlagerungsvorgänge verfälscht werden.

- Oftmals können nicht sämtliche funktionalen Zusammenhänge und Randbedingung, die in der Natur oder am Prototyp wirken, im physikalischen Modell berücksichtigt werden. Die fehlenden Einflussgrößen müssen vom Modellierer abgeschätzt und sinnvoll für Analysen und Ergebnisse überprüft werden. Beispiel: Ein typischer Effekt, der dieser Gruppe zugehört ist z.B., dass ein fehlender Windeinfluss, der auf die Wasseroberfläche im Brandungsbereich von Wellen einwirkt und küstennahe Zirkulation aufgrund der vom Wind induzierten Schubspannungen auslöst. Die Wellen im Labor hingegen werden ausschließlich mechanisch generiert. Ein anderer Effekt, der vornehmlich in der Flusshydraulik entsteht, ist der Einfluss des Fehlens der Coreolis-Kraft bei Flussmodellen, die in der Natur zu lokalen Strömungsphänomen führt und im Modell nur unzulänglich Berücksichtigung findet.

Der Kosteneffekt eines physikalischen Modells im Vergleich zu analytischen und numerischen Simulationen wurde bereits oben genannt. Dort wo ein mathematisches Modell sinnvolle und genaue Ergebnisse für den Ingenieur liefert, sollen diese Techniken auch angewendet werden und das komplexe physikalische Modell nur als finale Instanz zur Abbildung der Natur oder zur Erprobung eines Prototypen herangezogen werden.

1.3 Geschichtlicher Rückblick des wasserbaulichen Versuchswesen

Wissenschaftliche hydraulische Untersuchungen wurden im 16. Jahrhundert erstmals von Leonardo da Vinci durchgeführt. Da Vinci zeigte und skizzierte seinerzeit diverse komplexe Strömungsvorgänge (Geschwindigkeitsprofile und Wirbelstrukturen in Flüssen) in einer bis dahin nicht erfolgten Präzision und Detailtreue. Die erste theoretische Abhandlung von Ähnlichkeitskriterien mechanischer Prozesse wurde von Newton (1642-1727) angestellt. Er formulierte unter anderem auch die Regeln der sogenannten korrespondierenden Geschwindigkeiten, die das Verhältnis zwischen einer durch Schwerkraft (Gravitation) erzeugten Strömung in sich ähnelnden Bewegungen aber auf grundsätzlich differierenden Skalen beschreiben. Erste modellskalierte Experimente wurden von Smeaton um 1750 durchgeführt. Die Bemessung und Optimierung von Wasserrädern und Windmühlen standen damals im Vordergrund seiner Arbeit. Obgleich Smeaton keine streng mathematischen Relationen zwischen Modell und Prototyp beachtete, deutete er erstmals auf die Bedeutsamkeit dieser Zusammenhänge hin.

Der französische Wasserbau-Professor Reech führte 1852 erstmals eine Art der Froud'schen Ähnlichkeit im Rahmen von Untersuchungen des dynamischen Strömungswiderstands von modellmaßstäblichen Schiffen ein und entwickelte Regeln zur Umrechnung gemessener Geschwindigkeiten und Kräfte vom Modell zum Prototyp. 1870 unternahm Froude Messungen mit Modellschiffen in Schleppkanälen und führte analoge Berechnungen wie Reech durch. Froude verglich seine Resultate mit denen eines Protypens durch lineares Aufsklalieren. Seine Analysen befriedigten nicht ausnahmslos, was heute als die sogenannten Froud'sche Ähnlichkeit bekannt ist und in Form einer dimensionslosen Zahl seinen Namen trägt. Die ersten Experimente mit einer beweglichen Sohle in der Flusshydraulik wurden von Fargue 1875 durchgeführt. Er bildet einen Abschnitt der Garonne nach und demonstrierte die Richtigkeit seiner von ihm gemachten Empfehlungen zum Ausbau des Flusses mit den Modellergebnissen.

Reynolds modellierte 1885 den River Mersey mit einer beweglichen Sohle und verwendete für seine relativ kleines physikalisches Modell einen 33fach größeren Vertikal- als Horizontalmaßstab. Er benutzte für seine Experimente die natürliche Kornverteilung des Flusssubstrats und setzte diese in Originalgröße ein. Zwei Jahre später verkündete er optimistisch, dass er ein Konzept im wasserbaulichen Versuchswesen entwickelt hätte [3].

> *(...) due to proper circumstances it is indeed possible to build river models in which the development of the bed will be actually similar to that taking place in the corresponding section of the prototype river.*

Seine Arbeit wurde von Harcourt fortgeführt, der Feinsand und leichtere Materialien, wie gemahlene Holzkohle, einsetzte und den folgenden Gedanken zu seinen Modellierung machte:

> *(...) if I can succeed in demonstrating with the model that the origi-*

> *nally existing conditions can be reproduced typically; and if, moreover, by placing regulating works in the model, the same changes can be reproduced that were brought about by the training works actually built, then I am sure that I can take the promise of success, the probable effect of the projects that have been proposed.*

Das erste hydraulische Labor in den USA wurde 1887 an der Lehigh University von Prof. Mirremen eingerichtet; und das Erste in Deutschland wurde von Prof. Engels an der Technischen Universität Dresden 1898 gegründet. Zur Jahrhundertwende wurden an die Wasserbauingenieure eine Vielzahl von Fragen zu Flussregulierungsmaßnahmen im Zuge der Industriealisierung gestellt, so dass der Einsatz physikalischer Modelle eine immer weitere Anwendung fand. Mehrere invariante, dimensionslose Zahlen (Froude, Reynolds, Cauchy, etc.) basierend auf physikalischen Grundlagen wurden mit dem Ziel eingeführt, dass eine generelle Äquivalenz dieser Zahlen zwischen Modell und Prototyp bzw. Natur und damit einer hydraulischen Ähnlichkeit erfüllt sind. Ein formalerer Einstieg in die Bestimmung invarianter Parameter kam im Zuge der Entwicklung der Dimensionsanalyse Anfang des 20. Jahrhunderts hervor. Es ergab sich die Möglichkeit, invariante, dimensionslose Parametergruppen aus einer Vielzahl von Variablen zu determinieren. Um 1914 wurde in Hannover ein großes hydraulisches Labor an der hiesigen Universität eingerichtet, welches später (1936) den Namen seines Gründers Franzius erhielt. In Delft, Niederlande, wurde 1927 das wohl noch heute renommierteste Labor (Delft Hydraulics Laboratory) eingerichtet. Eine der ersten Aufgaben dort war es, den zu einem großen Teil unter dem Meeresspiegel liegenden Niederlanden ausreichend Schutz vor Sturmfluten und infolgedessen Überschwemmungen zu geben.

Nach dem zweiten Weltkrieg konnte weltweit eine Vielzahl an hydraulischen Laboreinrichtungen verzeichnet werden; Hughes [3] beschreibt einige von diesen. Unter diesen sollen kurz die Bedeutendsten ohne Achtung der Reihenfolge herausgenommen werden:

- Hydraulic Laboratories, Iowa University, USA,
- Delft Hydraulics Laboratory, Die Niederlande,
- Waterways Experiment Station, USA,
- National Research Council Hydraulics Laboratory, Canada,
- Port and Harbour Research Institute, Japan,
- Laboratoire Nationale D'Hydrauliques, Frankreich,
- Danish Hydraulic Institute, Dänemark,
- Hydraulic Research Wallingford, England,
- Coastal Research Laboratories, University of Delaware, USA,
- Water Research Station, University of New South Wales, Australien,

- Franzius Institut für Wasserbau, Universität Hannover, Deutschland
- Bundesanstalt für Wasserbau (Küsten- und Binnengewässer), Hamburg und Karlsruhe, Deutschland,
- Leichtweiss Institut für Wasserbau, Universität Braunschweig, Deutschland,
- Hubert Engels Laboratorium, Technische Universität Dresden, Deutschland,
- Wasserbaulabor der RWTH Aachen, Deutschland.

Seit Beginn der 40iger Jahre im letzten Jahrhundert bis heute spielen maßstäbliche physikalische Modelle eine bedeutende Rolle bei der Bemessung hydraulischer Strukturen und Bauwerken des Wasserbaus.

2 Definition eines physikalischen Modells

Der Begriff *hydraulisches, physikalisches Modell* erzeugt verschiedene Assoziationen bei verschiedenen Berufsgruppen, abhängig von deren Ausbildung in einer Fachwissenschaft, so dass eine allumfassende Definition nur bedingt möglich ist. Für manche beschränkt sich der Begriff auf kleinmaßstäbliche, hydraulische, physikalische Modelle; für andere wiederum schließt die Modellierung im Labor Turbulenz grundsätzlich aus. Eine etwaige Definition eines physikalischen Modells wird von Hughes [3] gegeben:

> **Definition:** *Ein hydraulisches, physikalisches Modell ist ein für gewöhnlich mit reduzierter Größe reproduziertes physikalisches System, so dass die im kleinmaßstäblichen System dominierenden Kräfte und Vorgänge – korrekt proportioniert zum eigentlichen physikalischen System (Prototyp) – in der Natur ähnlich repräsentiert werden.*

Ein Großteil physikalischer Modelle bildet Prototypen in einem verkleinert Maßstab ab, wobei dann auch mit verschiedenen Fluiden oder unter andersartigen Konditionen gearbeitet werden muß. Es gibt Beispiele, wo der Maßstab auch vergrößert im Modell abgebildet wird, z.B. bei der Strömungssimulation von roten Blutkörperchen in Venen und Arterien von Menschen (Price [6]). Abschließend für dieses Kapitel wird Yalin [7] zitiert, der definierte, dass:

> **Zitat:** *Ein physikalisches Modell ist ein Präzisionswerkzeug, welches in der Lage ist, Verhalten und Strukturen eines physikalischen Modells bestimmbar zu machen. Ein Modell gilt als zuverlässig, wenn es korrekt konstruiert (designed) wurde. Wenn das Design des Modells inkorrekt ist, so ist auch das Modell fehlerhaft, und in diesem Fall ist die Nutzung eines noch so ausgefeilten Messinstruments oder Messmethodik nur dazu in der Lage, die Genauigkeit einer Messung eines inkorrekten Modells zu erhöhen.*

In anderen Worten: ein Modell mit schlechter Skalierung verhält sich ähnlich wie ein Linial mit falscher Längeneinteilung. Das Lineal kann sicherlich dazu verwendet werden, eine Messung mit ausreichender Genauigkeit anzustellen, jedoch wird die Messung verglichen mit dem realen Wert garantiert falsch sein!

2.1 Ziele eines physikalischen Modells

Hughes [3] zählt drei wesentliche Ziele der physikalischen Modellierung auf, die so oder so ähnlich schon in einem vorangegangen Abschnitt über Vor- und Nachteile dieser Technik erwähnt wurden:

1. Suche nach qualitativen Einblicken eines physikalischen Problems, welche bislang unergründet geblieben sind (z.B. Turbulenz Formationen in brechenden Wellen, Kolkung durch Strömungsablösung und Wirbelbildung an Bauwerken),

2. Messungen zu machen, die theoretische Annahmen stützen oder widerlegen (z.B. nichtlineare Wellen in einer Gegenströmung, Interagierende nichtlineare Wellen),

3. Einblicke in hochkomplexe Phänomene zu erlangen, die theoretisch nicht oder nur bedingt analytisch fassbar sind (z.B. Stabilität von geschütteten Wellenbrechern, Sediment Suspension zur Bildung von Riffelbetten)

Dalrymple [2] klassifiziert die Ziele anders, und unterscheidet zwischen zwei typischen physikalischen Modellen: die eine Gruppe verifiziert oder entwickelt ein gängiges numerisches Modell weiter und definiert diese als **validation models**, während die andere ein Prototyp Verhalten unter Reproduzierung aller eine Rolle spielenden Kräfte simulieren soll. Letztgenannte Modelle werden von ihm als **design models** kategorisiert. Kamphuis [4] definierte eine dritte Gruppe, die sogenannten **process models**, die nur dazu errichtet werden, um einen Einblick in einen physikalischen Prozess zu erlangen, dessen grundlegende Mechanismen und damit analytische Beschreibung bislang verborgen blieben.

3 Das Konzept der Ähnlichkeit

Die generelle Vorgehensweise um das Konzept der Ähnlichkeit im wasserbaulichen Versuchswesen zu definieren, besteht darin herauszufinden, inwiefern die hydraulischen Bedingungen im skalierten Modell die tatsächlichen hydraulischen Bedingungen in der Natur (Prototyp) wiedergeben. Es basiert dabei auf der generellen Annahme [3], dass *(...) the fundamental entities of which the physical universe is constructed are such that from them a miniature universe could be constructed similar to the present universe.* Dass diese Annahmen in mikroskopisch kleinen Zusammenhängen, z.B. in der Nanotechnik, nicht mehr gelten, sollte hinlänglich bekannt sein.

Das **Konzept der Ähnlichkeit im wasserbaulichen Versuchswesen verlangt daher, dass spezifische Relationen und Parameter zwischen Modell und Natur identisch sind.** Grundsätzlich unterscheiden sich dabei nach Le Mehauté [5] drei verschiedene Möglichkeiten, die im folgenden ausführlich erläutert werden.

3.1 Ähnlichkeit durch Kalibrierung

Die Methode der Ähnlichkeit durch Kalibrierung ist die Älteste. Es wurde bereits von Sextus Julius Frontinus im ersten Jahrhundert vor Christus angewendet. Dieser baute ein skaliertes Modell des römischen Trinkwasser Aquädukts, um herauszufinden an welchen Stellen sich im Zuleitungssystem Sand und Geschwemmsel ansammelten und welche konstruktiven Optimierungsmethoden sich praktisch daraus ableiten ließen. Frontinus nutzte implizit die damals noch nicht bekannten Regeln der Ähnlichkeit, baute aufgrund seiner Unwissenheit zwangsläufig auch Fehler in die physikalischen Modelle ein. Qualitative erreichte er allerdings für die damalige Zeit hervorragende Ergebnisse.

Die Kriterien hingegen, die eine Ähnlichkeit im hydraulischen Verständnis ausmachen, basieren vornehmlich auf einer Kalibrierung des physikalischen Modells. Der Nachteil dieser Methode ist, dass die wesentlichen Prinzipien der Natur bzw. des Prototyps hinlänglich bekannt sein sollten. Die ingenieurwissenschaftlichen Lösungen, die sich mit einem kalibrierten Modell ergeben, müssen generell reproduzierbar (validierbar) sein; ansonsten macht die Kalibrierungsmethoden wenig Sinn, ist dann der zu Grunde liegende Mechanismus chaotischer Natur.

Die Ähnlichkeit durch Kalibrierung findet heute noch häufig in den Bereichen eine Anwendung, in denen hydromechanische Prozesse und Phänomene derart komplex sind, dass sie zunächst in grundlegenden **process models** in *trial and error* Verfahren untersucht werden müssen. Dimensionsanalysen oder analytische Beschreibungen bleiben diesen Prozessen (zunächst) verschlossen.

Es wird hierbei vorausgesetzt, dass das maßstäbliche physikalische Modell kaum oder nur geringen Skalierungseffekten unterlegen ist, um Messungen anzustellen, die denen des Prototypens stark ähnlich sind. Nur dadurch wird die Basis zur Kalibrierung des Modells gewährleistet. In Anbetracht der Komplexität und der Forschungsdefizite im Bereich des Sedimenttransports in Fliessgewässern und in Küstenregionen, bildet die Kalibrierungsmethode eine vielversprechende Möglichkeit, um generelle Auskünfte über Prozesse mit beweglichen Sohlen zu erhalten. Ein dominierender Fehler bei der Anwendung der Kalibrierungsmethode in der labortechnischen Praxis ist, dass zu hoher Stellenwert auf zu viele Ähnlichkeitskonditionen gelegt wird. Hughes [3] wertet diese Bestrebungen damit, dass das *(...) scale model knows best how to reproduce its own physical processes whether one understands it or not.*

Die zusammenfassende Bewertung der Methode der Ähnlichkeit durch Kalibrierung ist, dass es eigentlich eine *Kunst* darstellt, Modelle unter diesen Bedingungen zu errichten und Analysen damit anzustellen, so dass deren Ausführung hauptsächlich sehr erfahrenen labortechnischen Einrichtungen überlassen bleibt. Dass diese Methode auf natürliche Grenzen trifft, scheint selbstverständlich und kann mit einem Beispiel kurz wiederholt bzw. erläutert werden: Falls das zu untersuchende Phänomen nicht-deterministisch ist oder falls kleinste nicht vorhersagbare Effekte (Ursachen) große Auswirkungen induzieren, ist eine Anwendung der Methode der Ähnlichkeit durch Kalibrierung sinnlos. Beispielsweise könnte das bloße Vorhandensein eines (großen) Steins in einem mäandrierenden Fluss zur Folge haben, dass Kolkungen und lokale Strömungsverhältnisse eine vollkommen andersartiges globales Strömungsprofil hervorrufen, welches weder mit experimentellen noch analytischen numerischen Verfahren berechenbar ist. Die relativ einfache Flussmäandrierung mit beweglicher Sohle unter Verwendung eines einheitlichen Materials kann im hydraulischen, physikalischen Modell allerdings gut simuliert werden.

3.2 Dimensionsanalyse

Das sogenannte π-Theorem nach Buckingham [3] ist Hauptbestandteil der Dimensionsanalyse. Ergebnisse einer Dimensionsanalyse bezogen auf eine komplexe Problemstellung eines von den mathematische Zusammenhängen unbekannten Prozesses ist, dass eine Reduzierung der für den Prozess relevanten (beschreibenden) Variablen in Form von dimensionslosen Variablen (Produkten) erreicht wird [3].

3.2.1 Fundamentale und abgeleitete Dimension

Dimensionen und Einheiten sind ein integraler Teil jeder Messung einer physikalischen Größe, wobei Dimensionen z.B. als Masse, Länge, Fläche, Volumen, Zeit, Beschleunigung, Geschwindigkeit, spezifische Wärmekapazität oder Temperatur angegeben werden, wobei diese aber nicht zwangsläufig unabhängig voneinander sind. Tatsächlich stellen nur Masse, Länge, Zeit, Temperatur und Elektronendichte ein unabhängiges System dar. Ihre Einheiten werden als **base units** definiert. Andere physikalische Größen, wie Geschwindigkeit, Beschleunigung, Druck oder spezifische Wärmekapazität, werden als abgeleitete Dimensionen beschrieben. Ihre Einheiten werden als **derived units** definiert. Es existieren allerdings auch noch die sogenannten **supplementary units**, wie ein Winkel im Gradmaß. Diese weisen überhaupt keine fundamentale Dimension auf.

In Bezug auf ein *Massen*-System, formuliert Yalin [7], dass jede physikalische Größe aus einer Kombination der drei fundamentalen Größen Länge [L], Zeit [T] und Masse [M] über die folgende Beziehung erzeugt werden kann:

$$a[=]L^{\alpha}T^{\beta}M^{\gamma} \tag{1}$$

wobei das Symbol [=] bedeutet: *habe die Einheit von.* Yalin führt außerdem an, dass die Natur einer Größe vom Wert der Exponenten α, β und γ ist.

$$\begin{array}{cc} \text{Geometrische Größe, wenn} & \alpha \neq 0, \beta = 0, \gamma = 0 \\ \text{Kinematische Grße, wenn} & \alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma = 0 \\ \text{Dynamische Größe, wenn} & \alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0 \end{array} \tag{2}$$

Sind alle drei Exponenten $\alpha = \beta = \gamma = 0$ dann ist die Größe a nicht von den fundamentalen Größen Länge [L], Zeit [T] und Masse [M] abhängig und wird dann als dimensionslose Größe definiert, die denselben numerischen Wert in jedem Einheitensystem behält. Die anschließende Tabelle gibt einen Überblick über fundamentale und abgeleitete Größen., wobei nicht alle, wie z.B. die Dichte, einer Kategorie zugeordnet werden kann.

Physik. Größe	Dimension	Art der Größe
Fundamentale Größe		
Zeit	$[T]$	
Masse	$[M]$	
Länge	$[L]$	Geometrisch
Temperatur	$[T]$	
Winkel	$[1]$	
Abgeleitete Größe		
Fläche	$[L^2]$	Geometrisch
Kraft	$[MLT^{-2}]$	Dynamisch
Dichte	$[ML^{-3}]$	
Druck	$[ML^{-1}T^{-1}]$	Dynamisch
Geschwindigkeit	$[LT^{-1}]$	Kinematisch
Beschleunigung	$[LT^{-2}]$	Kinematisch
Durchfluss	$[L^3T^{-1}]$	Kinematisch
Energie	$[ML^2T^{-3}]$	Dynamisch
Impuls	$[MLT^{-1}]$	Dynamisch

3.2.2 Prinzipien der Dimensionsanalyse

Der erster Schritt in einer Dimensionsanalyse eines physikalischen Prozesses ist zu entscheiden, inwiefern eine Variable (Größe) überhaupt einen Einfluss auf den Prozess ausübt. Ist dies absolviert, können theoretische und experimentelle Studien mit dem Ziel ausgeführt werden, einen funktionalen Zusammenhang zwischen den verbliebenen Variablen zu finden. Wird kein theoretischer Zusammenhang gefunden, stellt die experimentelle Vorgehensweise den einzigen Lösungsweg dar.

Im Experiment wird zumeist nur eine Variable variiert, während andere konstant gehalten werden, um eine Art Sensitivitätsanalyse durchzuführen. Offensichtlich steigt die Anzahl der durchzuführenden Versuche überproportional mit der Zahl der Variablen, so dass erreicht werden muss, dass einzelne Variablen in dimensionslosen Variablen *untergebracht* werden müssen. Genau hier liegt der Ansatzpunkt einer Dimensionsanalyse nach Buckingham, der das π-Theorems entwickelt hat. Diese Prozedur formuliert, dass zunächst zu bestimmen ist, wie viele dimensionslose Produkte der den Prozess beschreibenden Variablen determiniert werden können. Dazu kann nach Hughes [3] die folgende Faustformel verwendet werden: In einer dimensionsbehafteten, homogenen Gleichung mit n Variablen, existieren $m = n - r$ dimensionslose Produkte, wobei r die Anzahl der fundamentalen Dimensionen der n Variablen angibt.

Eine Gleichung f beinhaltet n Variabeln und ist definiert:

$$f\left(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\right) = 0. \tag{3}$$

Das π-Theorem besagt also, dass diese Gleichung f mit Hilfe von m dimensionslosen Parametern umgeformt werden kann:

$$f\left(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_m\right) = 0, \tag{4}$$

wobei jedes der Elemente π_i in f ein unabhängiges dimensionsloses Produkt ist, deren Faktoren aus einigen der Variablen a_i gebildet werden.

In der Hydromechanik und im Wasserbau sind bereits mehrere dimensionslose Produkte definiert, die bereits vor Entwicklung der Dimensionsanalyse eingeführt worden sind, wie z.B.:

- Reynoldszahl: $Re = \frac{VL}{\nu}$,
- Froudezahl: $Fr = \frac{V}{\sqrt{gh}}$,
- Eulerzahl: $Eu = \frac{p}{\rho V^2}$,
- Weberzahl: $We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}$,
- Cauchyzahl: $Ca = \frac{\rho V^2}{E}$,
- Machzahl: $Ma = \frac{V}{c}$,
- Strouhalzahl: $St = \frac{\omega L}{V}$

mit: $\rho =$ Dichte, $V =$ Geschwindigkeit, $L =$ Länge, $\nu =$ kinematische Viskosität, $g =$ Gravitationskonstante, $F =$ Kraft, $p =$ Druck, $\sigma =$ Oberflächenspannung, $E =$ Elastizitätsmodul, $c =$ Schallgeschwindigkeit, $\omega =$ Kreisfrequenz.

Zusammengefasst beinhaltet die Dimensionsanalyse folgende Schritte:

1. Identifiziere alle wichtigen unabhängigen Variablen des physikalischen Prozesses,
2. Entscheide welcher der ermittelten Variablen Einfluss auf den physikalischen Prozess ausübt,
3. Bestimme wie viele dimensionslose Produkte aus den zuvor ermittelten Variablen erzeugt werden können,
4. Reduziere das Variablen System zu einer angemessenen Anzahl an dimensionslosen Variablen.

Die Summe der auf diese Art und Weise ausgewählten Variablen, kann ein sogenanntes *vollständiges Gefüge von dimensionslosen Produkten* bilden, wenn die zwei Voraussetzungen erfüllt sind:

1. Jedes dimensionslose Produkt in dem vollständigen Gefüge ist unabhängig von den anderen Produkten, und
2. jedes dimensionslose Produkt, das durch dieselben Variablen gebildet werden kann, produziert wiederum ein Produkt, welches alternativ durch Potenzieren aus dem originalen Produkt generiert werden kann.

Da das Prinzip des vollständigen Gefüges von dimensionslosen Produkten nicht ganz einfach nachvollziehbar ist, folgt an dieser Stelle ein kleine Beispiel:

> **Beispiel:** Die Variablen der Strömung L, V, g, ρ und μ bilden z.B. ein vollständiges Gefüge von dimensionslosen Produkten, dadurch, dass einerseits die Froudezahl und andererseits die Reynoldszahl aufgestellt werden können, so dass:
>
> $$\begin{aligned} Fr &= \frac{V}{\sqrt{gh}} \\ Re &= \frac{\rho V L}{\mu} \end{aligned} \tag{5}$$
>
> Dadurch, sind die dimensionslosen Produkte $\rho V^3/(\mu g)$ und $\rho g L^2/(\mu V)$ folglich Kombinationen der Reynolds- und Froudezahl. Diese Kombinationen sind:
>
> $$\begin{aligned} \rho V^3/(\mu g) &= \left(\frac{\rho V L}{\mu}\right)\left(\frac{V^2}{gL}\right) = Rr^1 Fr^2 \\ \rho g L^2/(\mu V) &= \left(\frac{\rho V L}{\mu}\right)\left(\frac{gL}{V^2}\right) = Rr^1 Fr^{-2} \end{aligned} \tag{6}$$

Beinhaltet eine physikalische Problemstellung mehrere Variablen derselben Dimension, so bildet das Verhältnis von zwei dieser Variablen ein dimensionsloses Produkt. Z.B. beziehen sich im Küsteningenieurwesen die Variablen Wellenhöhe H, Wellenlänge L und Wassertiefe d alle auf die Dimension $[L]$, so dass sofort mehrere dimensionslose Produkte, wie die Wellensteilheit H/L, die relative Wassertiefe d/L und die Wellenhöhe zur Wassertiefe Relation H/d aufgestellt werden können. Hierbei muß bemerkt werden, dass

$$\frac{H}{d} = \left[\frac{H}{L}\right]^1 \left[\frac{d}{L}\right]^{-1} \tag{7}$$

gilt und damit feststeht: Es werden lediglich zwei dimensionslose Produkte benötigt, um ein vollständiges Gefüge von dimensionslosen Produkten aus den Variablen H, L und d aus einer identischen Dimension $[L]$ aufzustellen. Ein weiteres Beispiel aus dem Bereich des *Ocean Engineering* soll dieses Prinzip näher bringen.

Beispiel: Die Variablen, die bei der Vorhersage der signifikanten Wellenhöhe H_s auf Ozeanen entscheidend zu sein scheinen, sind die Gravitationskonstante g, Windgeschwindigkeit U, Wassertiefe d und die Windeinwirkungslänge X, welche auch Fetch genannt wird. Diesbezüglich ergibt sich, dass der Wert der signifikanten Wellenhöhe H_s eine Funktion von $f(g, U, d, X)$ ist. Diese fünf Variablen bilden also ein vollständiges Gefüge von dimensionslosen Produkten. Ein solches Gefüge ist z.B., gH_s/U^2, gd/U^2 sowie gX/U^2, und H_s kann damit nach Buckingham's π-Theorem über den Zusammenhang

$$\frac{gH_s}{U^2} = F\left(\frac{gd}{U^2}, \frac{gX}{U^2}\right) \tag{8}$$

ausgedrückt werden. Durch Erzeugung der dimensionlosen Produkte, wird die Anzahl der Variablen von 4 auf 2 reduziert, wobei g hier als Konstante angenommen wird. Dies ist eine große Vereinfachung und hilft dem in der Praxis tätigen Ingenieur vehement. Entsprechende Tafeln werden im Shore Protection Manual (1978) bzw. im Coastal Engineering Manual (2001) auch tatsächlich verwendet, da die internen Prozesse bei der Wellengenerierung durch Wind immer noch weitesgehend unbekannt sind.

Noch einfacher gestaltet sich eine Dimensionsanalyse, wenn die am Prozess beteiligten Variablen in einer Matrix aufgeschrieben und deren jeweilige Dimension in Potenzschreibweise tabellarisch festgehalten wird. Auf das vorherige Beispiel zur Bestimmung der signifikanten Wellenhöhe H_s gestaltet sich diese Matrix bezogen auf ein Massen-System, wie folgt:

	g	H_s	U	d	X
L	1	1	1	1	1
T	-2	0	-1	0	0
M	0	0	0	0	0

Da die Einheit der Masse in dieser vereinfachten Betrachtung nicht enthalten ist, beschränkt sich die Zahl der fundamentalen Dimensionen auf $r = 2$ und damit die Zahl der dimensionslosen Produkten auf $m = n - r = 5 - 2 = 3$. Das vollständige Gefüge der dimensionslosen Produkte beinhaltet drei π Terme, die jeweils die Form:

$$\pi = g^{k_1} H_s^{k_2} U^{k_3} d^{k_4} X^{k_5} \tag{9}$$

aufweisen müssen. Das System der unabhängigen Exponenten Gleichungen kann sofort aus der Matrix aufgeschrieben werden und ist damit:

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5) &= 0 \\ -2k_1 - k_3 &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Dieses Gleichungssystem ist mit nur zwei Gleichungen und fünf Variablen überdeterminiert, so dass drei vorgegeben und somit zwei Variablen damit bestimmbar werden. Das erste π Produkt sollte die abhängige Variable mit der ersten Potenz integriert haben, so dass $k_2 = 1$ gewählt wird. Der Fetch sollte darüber hinaus nicht in demselben Parameter auftauchen, so dass $k_4 = k_5 = 0$ definiert werden. Nach Auflösung des Gleichungssystems verbleibenden $k_1 = 1$ und $k_3 = -2$, so dass der erste π Term die Form:

$$\pi_1 = g^1 H_s^1 U^{-2} d^0 X^0 = \frac{gH_s}{U^2} \tag{11}$$

annimmt. Der zweite π Term beinhaltet nicht die abhängige Variable, so dass $k_2 = 0$ wird. Außerdem wird jetzt die Wassertiefe d aber wiederum nicht der Fetch X berücksichtigt, so dass $k_4 = 1$ und $k_5 = 0$ sind. Das resultiert darin, dass $k_1 = 1$ und $k_3 = -2$ berechnet werden und führt schließlich zu dem zweiten π Term:

$$\pi_2 = g^1 H_s^0 U^{-2} d^1 X^0 = \frac{gd}{U^2} \tag{12}$$

Mit einer analogen Vorgensweise für den dritten π Term, wobei diesmal der Fetch X Berücksichtigung finden muß, ist π_3 definiert:

$$\pi_3 = g^1 H_s^0 U^{-2} d^0 X^1 = \frac{gX}{U^2} \tag{13}$$

Durch diese Dimensionsanalyse ist der Zusammenhang geschaffen, dass die signifikante Wellenhöhe wie folgt definiert werden kann:

$$H_s = \frac{U^2}{g} F\left(\frac{gd}{U^2}, \frac{gX}{U^2}\right) \tag{14}$$

Hughes [3] folgert, dass die Wirkung der Dimensionsanalyse durch ihre einfache Anwendung und universelle Einsetzbarkeit einerseits als Stärke aber auch als Schwäche zu sehen ist. Le Mehauté [5] sieht es noch etwas pessimistischer, da die Dimensionsanalyse nur eine Ersatzlösung des eigentlichen physikalischen Systems ist, welches aber nur eine Lösung im mathematischen Verständnis herbeiführt, obgleich er auch konstatiert, dass ohne die Dimensionsanalyse oftmals überhaupt keine Lösung eines komplexen System existieren würde.

3.3 Ähnlichkeitsgesetze

Birkhoff [1] prägte den Begriff der *inspectional analysis* und stellte damit die allgemein gültigen Ähnlichkeitsgesetze auf, die sich in den dominierenden physikalischen Gleichungen widerspiegeln. Diese können entweder allgeimer Art oder beispielsweise auch die *Reynold*'schen oder *Navier-Stokes*'schen Gleichungen umfassen. Sie können in differentieller Form, vereinfacht auf eine Dimension sowie von empirischer oder experimenteller Natur sein.

Es wird dabei angenommen, dass der Prototyp eine ausgeglichene Kräftebilanz erfüllt. Es gilt, $A+B+C+... = 0$ und dabei könnte A eine Trägheitskraft, B eine Druckkraft und C eine Elastizitätskraft sein. Das skalierte Modell erfüllt die analoge Bedingung, dass nämlich $a+b+c+... = 0$ ist, wobei die Platzhalter in Form der kleinen Buchstaben in dieser Gleichung den großen Buchstaben aus der Naturgleichung ähnlich sind. Unter dieser Voraussetzung besagt das Ähnlichkeitsgesetz, dass die Relationen $a/A = b/B = c/C = ... = Y$ eine Konstante bilden müssen; nur dann gilt eine mechanische Ähnlichkeit zwischen Modell und Prototyp.

Die *inspectional analysis* gewährt also einen weitaus tieferen Einblick in Physik, als es die Kalibrierungsmethode bzw. die Dimensionanalyse zulassen. Im speziellen erlaubt die *inspectional analysis*:

- Identifikation der wichtigen und vernachlässigbaren Parameter in einem physikalischen Prozess,
- Definition der minimalen Skalierung, um zu garantieren, dass die wichtigsten Parameter im Prozess auch skaliert abgebildet werden,
- Abschätzung der wichtigsten Parameter im Prozess; Determinierung der Skalierungseffekte, so dass die vernachläsigbaren Größen ermittelt werden können,
- Erkennung der ingenieurtechnischen Lösungen.

In der Strömungmechanik sind generell sechs charakteristische Kräfte maßgebend: Trägheits-, Druck-, Schwere (Gravitations-), Zähigkeits- (Viskose-), Oberflächenspannungs- und Elastizitätskräfte. Korreliert man diese zwischen Modell und Prototyp, sind alle Ähnlichkeitskriterien erfüllt und man kann davon ausgehen, dass das Modell sich exakt wie der Prototyp in der Natur verhält. Dass jedoch, diese sechs Kräftegleichgewichte in der Regel nicht erfüllt werden können, wird in den nächsten Abschnitten beschrieben. Zwar ist beispielsweise eine geometrische Ähnlichkeit unabhängig von einer Bewegung des Systems; aber ein Kräftegleichgewicht hängt eindeutig von der Wahl des geometrischen Maßstabs ab, ob nämlich im Modell z.B. die Oberflächenspannung einen größeren Einfluss hat, die beim Prototyp einen weitaus geringeren Stellenwert haben und folglich vernachlässigt wird.

Die Ähnlichkeitsbeziehungen zwischen den sechs Kräften spiegeln sich in Newton's zweitem Bewegungsgesetz wider:

$$F_i = F_p + F_g + F_V + F_t + F_e \tag{15}$$

mit: $F_i =$ Trägheitskraft $[\rho V^2 L^2]$, $F_p =$ Druckkraft $[\Delta p L^2]$, $F_g =$ Schwerkraft $[\rho g L^3]$, $F_V =$ Zähigkeitskraft $[\mu V L]$, $F_t =$ Oberflächenspannung $[\sigma L]$, $F_e =$ Elastizitätskraft $[E L^2]$. Für eine dynamische Ähnlichkeit, mußsen die Verhältnisse zwischen Trägheitskräften sowie zwischen den Kräftebilanzen im Modell und beim Prototyp identisch sein.

$$\frac{(F_i)_m}{(F_i)_p} = \frac{(F_p + F_g + F_V + F_t + F_e)_m}{(F_p + F_g + F_V + F_t + F_e)_p} \tag{16}$$

und für eine vollständige Ähnlichkeit muß erfüllt sein, dass

$$\frac{(F_i)_m}{(F_i)_p} = \frac{(F_p)_m}{(F_p)_p} = \frac{(F_g)_m}{(F_g)_p} = \frac{(F_V)_m}{(F_V)_p} = \frac{(F_t)_m}{(F_t)_p} = \frac{(F_e)_m}{(F_e)_p}. \tag{17}$$

Kein Modell kann diese Gleichung vollständig erfüllen! Dennoch können meistens unter Vernachlässigung der Oberflächenspannung (wenn das Modell nicht zu klein ist) und der Elastizitätkräfte (sofern es sich um identische Fluide handelt) einigen Bedingungen nachgekommen werden.

Auf diese Art und Weise werden Modelle errichtet, die entweder Schwer- oder Zähigkeitskraft dominiert sind und infolgedessen Froude- bzw. Reynoldsmodelle genannt werden.

3.3.1 Froudemodelle

Ein praktisches Beispiel für eine Modellähnlichkeit, welche von Schwerkräften – also einer Stromung mit freier Oberfläche – dominiert wird, besagt, dass die Verhältnisse von Trägheits- und Schwerkraft im Modell und beim Prototyp identisch sein müssen:

$$\frac{(F_i)_m}{(F_g)_m} = \frac{(F_i)_p}{(F_g)_p} \tag{18}$$

mit Dimensionen behaftet lautet das Gleichgewicht:

$$\left(\frac{\rho V^2 L^2}{\rho g L^3}\right)_m = \left(\frac{\rho V^2 L^2}{\rho g L^3}\right)_p \tag{19}$$

Unter der Voraussetzung, dass für Modell und Prototyp dasselbe Fluid verwendet wird, vereinfacht sich diese Gleichung zu:

$$\left(\frac{V^2}{gL}\right)_m = \left(\frac{V^2}{gL}\right)_p \tag{20}$$

und schließlich zu:

$$\frac{(V_m/V_p)^2}{(g_m/g_p)\,(L_m/L_p)} = 1 \tag{21}$$

was letztendlich einer zwischen Modell und Prototyp relativierten Froudezahl $V_m/(\sqrt{g_m L_m}) = V_p/(\sqrt{g_p L_p})$ entspricht. Weil allgemein die Gravitationskonstante g im Modell und Natur gleich groß ist, ergibt sich:

$$\frac{(V_m/V_p)}{\sqrt{(L_m/L_p)}} = 1 \tag{22}$$

Wird für eine geometrische Ähnlichkeit der Längenmaßstab $\lambda = L_p/L_m$ verwendet, so verhalten sich die Geschwindigkeiten zueinander:

$$V_p = \sqrt{\lambda} V_m \tag{23}$$

d.h., im Modell sind die Strömungsgeschwindigkeit nur um den Faktor $1/\sqrt{\lambda}$ kleiner, während die Längen um den Faktor $1/\lambda$ zur Natur skaliert sind. Zusammengefasst gilt für die wichtigsten Parameter in einem Froudemodell:

- Längen $= L_p/L_m = \lambda$,
- Flächen $= A_p/A_m = \lambda^2$,
- Volumen $= V_p/V_m = \lambda^3$,
- Geschwindigkeiten $= v_p/v_m = \sqrt{\lambda}$,
- Zeiten $= t_p/t_m = \sqrt{\lambda}$,
- Durchflüsse $= Q_p/Q_m = \sqrt{\lambda^5}$,

Jetzt ist auch sofort ersichtlich, dass in einem Modell nicht gleichzeitig eine *Froude*'sche und eine *Reynold*'sche Ähnlichkeit existieren kann, da allein die Zeitskalen in beiden Modellen (Froude: $\sqrt{\lambda}$ und Reynolds: λ^2) unterschiedlich sind.

Wie soeben erfahren, müssen bei Modellen mit freier Oberfläche, bei denen auch der Einfluss der Schwerkraft zum Tragen kommt, die Froudezahlen im Modell und Natur gleich gehalten werden. Hier ist jedoch die Berandung des Fliessquerschnitts nur zum Teil vorgegeben. An der freien Oberfläche als Fliessgrenze kommt die Wirkung der Kräfte, auch der Reibungskräfte, zum Tragen. Will man identische Energiehöhen, Wasserspiegel und Sohlgefälle im Modell und in der Natur erreichen, müssen wiederum die Verlusthöhen dem Übertragungsmaßstab der Längen entsprechen ($I = h_v/L$). Damit ist der Rauhigkeitsbeiwert $\lambda_{Verlust}$ nach dem Moody-Diagramm zu bestimmen. Wegen der kleineren Reynoldszahlen im Modell muss die Modellberandung (Ufer- und Sohlenbeschaffenheit) dann kleinere k/D-Werte aufzeigen. Die Einstellung des Modells auf Naturverhältnisse (Kalibrierung) erfolgt über die Variation der Modellrauhigkeit, bis die tatsächliche Spiegellinie erreicht ist.

3.3.2 Reynoldsmodelle

Ein weiteres praktisches Beispiel für eine Modellähnlichkeit, welche von Zähigkeitskräften – also einer Rohrstromung – dominiert wird, besagt, dass die Verhältnisse von Trägheits- und Zähigkeitskraft im Modell und beim Prototyp gleichgesetzt werden:

$$\frac{(F_i)_m}{(F_v)_m} = \frac{(F_i)_p}{(F_v)_p} \tag{24}$$

mit Dimensionen behaftet lautet das Gleichgewicht:

$$\left(\frac{\rho V^2 L^2}{\mu V L}\right)_m = \left(\frac{\rho V^2 L^2}{\mu V L}\right)_p \tag{25}$$

diese Gleichung vereinfacht sich zu:

$$\left(\frac{\rho V L}{\mu}\right)_m = \left(\frac{\rho V L}{\mu}\right)_p \tag{26}$$

und schließlich zu:

$$\frac{(\rho_m/\rho_p)(V_m/V_p)(L_m/L_p)}{(\mu_m/\mu_p)} = 1 \tag{27}$$

was letztendlich einer zwischen Modell und Prototyp relativierten Reynoldszahl $\rho_m V_m L_m/\mu_m = \rho_p V_p L_p/\mu_p$ entspricht. Weil allgemein die Dichte ρ und die dynamische Viskosität μ im Modell und Natur gleich groß sind (wobei teilweise auch andere Fluide im Modell Verwendung finden können), ergibt sich:

$$\frac{V_m L_m}{V_p L_p} = 1 \tag{28}$$

Wird wiederum für eine geometrische Ähnlichkeit der Längenmaßstab $\lambda = L_p/L_m$ verwendet, so verhalten sich die Geschwindigkeiten zueinander:

$$V_p = \lambda V_m \tag{29}$$

d.h., im Modell sind die Strömungsgeschwindigkeit und die Längen um den Faktor $1/\lambda$ zur Natur skaliert. Zusammengefasst gilt für die wichtigsten Parameter in einem Reynoldsmodell:

- Längen = $L_p/L_m = \lambda$,
- Flächen = $A_p/A_m = \lambda^2$,
- Volumen = $V_p/V_m = \lambda^3$,
- Geschwindigkeiten = $v_p/v_m = 1/\lambda$,
- Zeiten = $t_p/t_m = \lambda^2$,
- Durchflüsse = $Q_p/Q_m = \lambda$,

Dass die Vorgänge in Rohrleitungen, die ermittelt werden sollen, jedoch nicht einwandfrei berechenbar sind, hängt von den Verlusten im System ab. Die kontinuierlichen $h_{v_{kont.}} = \lambda_{Verlust} LV^2/(2gD)$ und örtlichen Reibungsverluste $h_{v_{ort.}} = \lambda_{Verlust} LV^2/(2gD)$ gelten eigentlich nur für stationäre Fliesszustände. Im instationären Fall sind beide Verlusthöhen nicht definiert. Diese Verluste haben also einen signifikanten Einfluss auf das Strömungsverhalten, weil Energie dem Fliessvorgang entzogen wird.

Eine exakte Modellähnlichkeit ist dann gegeben, wenn das Verhältnis aller wirksamen Kräfte den gleichen konstanten Quotienten ergibt, wie oben bereits erläutert. Nur wenn die Reynoldszahlen im Modell und Natur identisch sind, gilt die Ähnlichkeit zwischen Trägheits- und Zähigkeitskräften. Außerdem müssen mechanische Ähnlichkeiten noch erfüllt werden, dazu gehören neben Rohrform und Längenabmessungen auch die Oberflächenbeschaffenheit der Rohrwandung (Material). Sie wird in der Rohrhydraulik durch den Parameter k/D gekennzeichnet und ihr Einfluss ist wiederum im Moody-Diagramm dargestellt. Dabei treten folgende Probleme auf:

- Bei sehr glatten Naturrohren kann das Verhältnis k/D im Modell nicht mehr erreicht werden, es entstehen dann immer größere Modellverluste,
- Der Erzeugung von der λ-fachen Modellgeschwindigkeit durch eine λ^2-fache Druckdifferenz setzt die Modelltechnik Grenzen.

Es wird aus versuchstechnischen Grenzen dann auf angenäherte Ähnlichkeiten ausgewichen, indem man das gleiche Verhältnis von Massen- zu Reibungskräften nicht für das Flüssigkeitselement (das hieße identische Reynoldszahl), sondern nur für die Verluste in der Leitung fordert, also:

$$\frac{\lambda_p L_p}{D_p} = \frac{\lambda_m L_m}{D_m} \tag{30}$$

man kann diese Gleichung erfüllen, wenn:

- rauher Bereich ($\lambda_{Verlust} = f(k/D)$), es ergibt sich ein Re_{min} – das Modell darf nur mit $Re > Re_{min}$ betrieben werden,
- Übergangs- oder glatter Bereich ($\lambda_{Verlust} = f(Re, k/D)$). So ist $\lambda_{Verlust}$ durch Änderung von Re (bei $Re_m < Re_p$) zu bestimmen, jedoch treten enge Grenzen auf, weil *glatter* als hydraulisch glatt nicht möglich ist,
- verzerrte Modelle, wähle verschiedene Längs- und Quermaßstäbe, z.B. $D_p/D_m < L_p/L_m$, also relativ größerer Rohrdurchmesser im Modell.

3.3.3 Grenzen des Versuchswesens

Hydraulische Modelle müssen gewisse Abmessung aufweisen, die nach oben hin durch Laborabmessungen und nach unten durch Ähnlichkeitsgrenzen beschränkt werden. Durch Reduzierung der Reynoldszahln wirkt sich der Zähigkeitseinfluss unmaßstäblich aus, aber die *hydraulisch glatt* Kurve aus dem Moody-Diagramm kann nicht unterschritten werden. Strenger ist die Forderung nach turbulenter Strömung, die sowohl in der Natur als auch im Modell garantiert werden muß. Außerdem spielt die Oberflächenspannung vor allem im Modell eine Rolle, so dass ihr Einfluss niemals überwiegt, muss insbesondere in Flussmodellen eine ausreichende Wassertiefe (min. 3 cm) gegeben sein! Ist die Einhaltung dieser Wassertiefe nicht erreichbar, etwas bei großflächigen Modellen, sollte der vertikale Maßstab überhöht abgebildet werden. Ähnlichkeitsgesetze gelten dann nur noch näherungsweise, so dass eine erneute Kalibrierung erforderlich wird. Ein Problem beim Verzerren ist, dass vertikale und horizontale Geschwindigkeiten unterschiedlich übertragen werden.

3.3.4 Detailprobleme des wasserbaulichen Versuchswesen

- Bewegliche Sohle: Modellkörnung ist nicht beliebig verkleinerbar, weil sich das physikalische Verhalten des Bodens signifikant ändert (Sand - Ton). Als Abhilfemaßnahme kommt z.B. einen Abmiderung der spezifische Dichte des anstehenden Materials in Frage.
- Tidemodelle: Übergang auf Zähigkeitsabflüsse bei flachen Neigungen (Oberflächenspannung), bei zu langsamen Strömungen im Modell können unter Umständen nicht gewollte laminare Zustände erzielt werden. Außerdem wird im Modell nicht oder nur kaum der Einfluss der Coriolis-Kraft bemerkbar sein.
- Schwingungen: Bauwerksschwingungen, die durch Strömungen im Modell erzeugt werden, sind auf die Natur überhaupt nicht übertragbar.
- Luftaufnahme: Aufgrund großer Verwirbelungen oder beim Wellenbrechen ist die Luftaufnahme (air entrainment) vom Modell auf den Prototyp ebenfalls nicht übertragbar, da Luftblasen im Modell und in der Natur mit gleicher Aufstiegsgeschwindigkeit auftreten.

3.3.5 Wahl des Maßstabs

Sicherlich sollte ein Modellmaßstab nicht zu klein gewählt werden, so dass auf dieser Ebene nicht andere Kräfte (Zähigkeit-, Kapillar- und Elastizitätseffekte) übermässigen Einfluss auf die physikalsichen Prozesse ausüben. Es muß also erkannt werden, dass die Skalierung nicht unendlich fortgeführt werden kann; andererseits existiert niemals vollkommene Ähnlichkeit zwischen Modell und Natur – das Modell kann nur die Natur ähnlich abbilden.

Oftmals resultieren Skalierungseffekte auch aus einer unzureichenden Laborausstattung, z.B. bei der mechanischen Reproduzierung von Wellen in Kanälen, die wie hinlänglich bekannt sein sollte, in der Natur durch den Wind erzeugt werden. Oder die Verwendung von Süßwasser im Labor, wobei dieser Effekte relative einfach ausgeglichen werden kann, da das Modell einfach ein anderes Gewicht zugeordnet bekommt und damit die Auftriebskräfte wieder identisch sind. Hingegen spielen Messfehler eine größere Rolle, insbesondere bei Messvorgängen im Modell, da oftmals die Strömungsprozesse durch die Hinzunahme von Instrumenten nachhaltig beeinflusst wird (z.B. Geschwindigkeitsmessung mit hydrometrischen Flügeln).

Die Wahl des Modellmaßstabs richtet sich also einerseits nach gewissen ökonomischen Randbedingungen, und den physikalischen Randbedingen andererseits, um eine ausreichende Modellähnlichkeit zu gewährleisten. Letztendlich entscheidet der Modellierer nach Erfahrung, was den *richtigen* Modellmaßtab ausmacht.

Z.B. wurden Hafenmodelle zur Untersuchung der Wellenausbreitung und des Resonanzverhaltens in Maßstäben 1/300, 1/150 und 1/100 ausgeführt, um dann doch herauszufinden, dass ein Maßstab von 1/150 wohl den *richtigen* Maßstab im ökonomischen wie auch im physikalischen Verständnis ausmacht. Weitere typische Modellmaßstäbe im wasserbaulichen Versuchswesen sind beispielsweise:

- Wellenbrecher Stabilität: 1/30 bis 1/50,
- Wind-Wellen Einwirkung in Häfen: 1/150 (Wassertiefe sollte nicht kleiner als 3 cm und Wellenperioden nicht kleiner als 0,5 sec werden),
- Wasserkraftwerke (Zu- und Auslaufquerschnitte), Entlastungsanlagen (Sprungschanzen): 1/50 bis 1/100,
- Flussmodell, Ästuar: 1/100 (vertikal), 1/800 (horizontal),
- Strand, Shoreline: 1/100 (vertikal), 1/300 (horizontal),
- Schiffsmodell: 1/100.

Dennoch ist der Trend zu beobachten, dass weltweit immer mehr *Superlabs* eingerichtet werden, die großmaßstäbliche Versuchseinrichtungen zur Verfügung stellen [5], um optimale Bedingungen zu garantieren und Skalierungsfehler zu vermeiden.

Literatur

[1] Birkhoff, G. (1950). Hydrodynamics: A Study in Logic, Fact and Similitude. Dover, New York

[2] Dalrymple, R. A. (1985). Introduction to Physical Modells in Coastal Engineering. in: *Physical Modelling in Coastal Engineering*, Editor: R. A. Dalrymple, A. A. Balkema, Rotterdam, The Netherlands, pp. 3-9

[3] Hughes, S. A. (1993). Physical Models and Laboratory Techniques in Coastal Engineering. Adv. Series on Ocean Engineering, Vol. 7, World Scientific

[4] Kamphuis, J. W. (1991). Physical Modelling. in: *Handbook of Coastal and Ocean Engineering*. Editor: J. B. Herbich, Gulf Publishing Company, Houston, USA, Vol. 2

[5] Le Mehauté, B. (1990). Similitude. in: *Ocean Engineering Science*, Editor: B. Le Mehauté, Vol. 9, Part B in the series *The Sea*, John Wiley and Sons, N.Y., pp. 955-980

[6] Price, W. A. (1978). Modells - Can we learn from the Past (theme speech). *Proceedings of the 16th Coastal Engineering Conference*, ASCE, Vol. 1, pp. 25-36

[7] Yalin, M. S. (1989). Fundamentals of Hydraulic Physical Modelling. in: *Recent Advances in Hydraulic Physical Modelling*, Editor: R. Martins, Kluwer Academics Publishers, Dordrecht, The Netherlands, pp. 567-588